Prof. Dr. Alfred Toth

Qualitative semiotische Zahlentheorie I

1. Die Idee, die Semiotik und die polykontexturale Logik zu einem einheitlichen Modell zusammenzubauen, stammt von Kronthaler (1992). Ich selber habe seit 1992, vor allem aber gegen Ende der 90er Jahre, versucht, diese „Hochzeit von Semiotik und Struktur“ anzubahnen. So heisst auch mein 2003 erschienenes Buch, in der ich zu der mich selbst verblüffenden Lösung gekommen war, es genüge im Prinzip, die natürlichen Zahlen zuzüglich der Null zu nehmen und sie auf Keno-Strukturen abzubilden. Auf diese Weise würde man entsprechend der polykontexturalen aus der monokontexturalen Logik und der qualitativen aus der quantitativen Mathematik eine „polykontexturale Semiotik“ aus der „monokontexturalen Semiotik“ bekommen:

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow (\square, \blacksquare, \triangle, \blacktriangle, \bigcirc, \bullet, \triangle, \blacktriangle, \ldots)$$

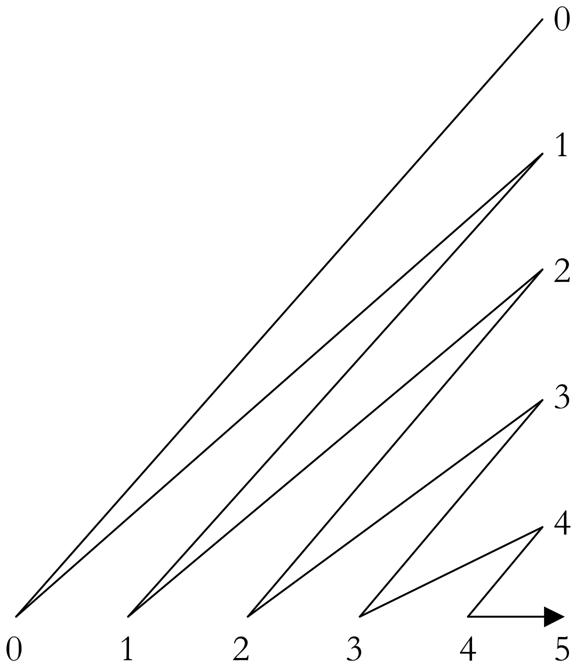
polyk.Logik qual. Mathematik polyk. Semiotik

Viel weiter sind aber weder Kronthaler noch ich später gekommen. Gewaltige Durchbrüche brachten erst 2008 Rudolf Kaehrs Kontexturierung der Primzeichenrelation (und der semiotischen Matrix), die Verankerung semiotischer Systeme (Kaehr 2009a) sowie die Einführung semiotischer Morphogramme (Kaehr 2009b).

2. Wie ich in diesem Aufsatz zeigen werde, sind wir aber damit noch nicht fertig, denn es fehlt das Herzstück der qualitativen Mathematik: die Unterscheidung qualitativer Zahlen in Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen. Wie bekannt, zeichnen sich die Peano-Zahlen durch ihre Linearität aus, d.h. wir haben

$\sigma(n) = (n+1)$
$\alpha(n) = (n-1)$.

Wie bereits Günther (1979 [1971], S. 261) dargestellt hatte, sind qualitative Zahlen dagegen „tabular“:



In Toth (2009) und weiteren Arbeiten hatte ich zudem gezeigt, dass bei Peirce-Zahlen zwischen triadischen (td) und trichotomischen (tt) unterschieden werden muss

tdP = $(A \subset ((A \subset B) \subset C)$
ttP = $(a \subseteq b \subseteq c)$,

und dass die Nachfolger- und Vorgängerrelationen bei diagonalen Relationen unbestimmt ist:

$$\begin{tikzcd}
1.1 \arrow[r] \arrow[d] & 1.2 \arrow[r] \arrow[d] & 1.3 \arrow[d] \\
2.1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & 2.2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & 2.3 \arrow[d] \\
3.1 \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & 3.2 \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & 3.3
\end{tikzcd}$$

So ist also z.B. wegen triadischem $1 < 2$ $(1.2) = \alpha(2.1)$, aber wegen trichotomischem $2 > 1$ gilt enfalls $(1.2) = \sigma(2.1)$, und umgekehrt. D.h. das Vorgänger- und Nachfolgersystem ist bei Peirce-Zahlen noch einiges komplizierter als bei qualitativen Zahlen. Wegen der Möglichkeit der Gleichheit ist es fermer umöglich, trichotomische Peircezahlen als eindeutige Nachfolger oder Vorgänger zu bestimmen.

3. Man muss sich an dieser Stelle auch ernsthaft fragen, wie man eine triadische Relation über angeblich einer monadischen, einer dyadischen sowie einer triadischen, aber tatsächlich über drei dyadischen Relationen (den Subzeichen) wirklich auflöst, wenn man sie als polykontexturales n-Tupel vermöge

$\mathbb{N} \cup \{0\} \to$ (□, ■, △, ▲, ○, ●, △, ▲, ...)

schreibt. Konkret gesagt: Wie bildet man etwa die Zeichenklasse (3.1 2.1 1.3) auf eine Kenosequenz ab? Indem man quasi Paare von Kenos für die Dyaden nimmt? Das ist offensichtlicher Unsinn. Dann aber bleibt nur eine Lösung: Man verabschiedet sich von den Trichotomien. Ich weise ausdrücklich darauf hin, dass kartesische Produkte aus Primzeichen, Subzeichen genannt, innersemiotisch unmotiviert und wohl unmotivierbar sind. Warum ist etwa ein Icon (2.1) eine „Erstheit der Zweitheit“? Nach der Peirceschen Basis-Triade wäre der Icon somit eine „Qualität der Quantität“. Als Modell aber ist er z.B. ein Bild (vgl. Walther 1979, S. 63). Warum also ist ein Bild oder Abbild eine „Qualität der Quantität“? Genauso gut könnte man das Icon mit „1“, den Index mit „2“ und das Symbol mit „3“ – oder mit irgendwelchen Phantasie-zahlen – kennzeichnen. Wir sollten auch nicht vergessen, dass es in polykontexturalen Systemen keine kartesischen Produkte geben kann, denn diese setzten den Gruppenbegriff voraus, und die Mathematik der Qualität stellt nicht einmal ein Gruppoid dar! Es ist somit Unsinn, die Trichotomien zu behalten. Sie dürfte das bisherige Haupthindernis gewesen sein, welches die Abbildung von Zeichen aus Kenogrammstrukturen verhinderten.

Damit werden also aus triadischen nun hexadische Relationen:

(3.1 2.1 1.1) → (312111)
(3.1 2.1 1.2) → (312112)
(3.1 2.1 1.3) → (312113)

Damit haben wir gleich ein anderes bisheriges Hindernis aus dem Weg geräumt: die triadische Verschachtelung, wonach die Erstheit in der Zweitheit und beide in der Drittheit „involviert“ seien (Bense 1979, S. 53, 67). Das Zeichen ist somit nun eine gewöhnliche Menge bzw. Relation und keine metarelationale Menge oder meta-mengentheoretische Relation mehr (vgl. die sehr berechtigte Kritik Kaehrs in Kaehr 2009c).

4. Nach diesen Vorbereitungen im Anschluss an Toth (2003) sind wir nun bereit, die einzelnen Schritte von den Peano-Zahlen mit Qualitätssprung zunächst zu den Proto-Zahlen und hernach zu den Deutero- und den Trito-Zahlen, wie sie Kronthaler (1986, S. 16) aufgezeigt hatte, auch anhand der Zeichen, nunmehr aufgefasst als hexadische Relationen, zu vollziehen.

4.1. Wert-Abstraktion des Zeichens

$$\left.\begin{array}{lcl}
(3.1\ 2.1\ 1.1) & \rightarrow & (abcbbb) \\
(3.1\ 2.1\ 1.2) & \rightarrow & (abcbbc) \\
(3.1\ 2.1\ 1.3) & \rightarrow & (abcbba) \\
(3.1\ 2.2\ 1.2) & \rightarrow & (abccbc) \\
(3.1\ 2.2\ 1.3) & \rightarrow & (abccba) \\
(3.1\ 2.3\ 1.3) & \rightarrow & (abcaba) \\
(3.2\ 2.2\ 1.2) & \rightarrow & (acccbc) \\
(3.2\ 2.2\ 1.3) & \rightarrow & (acccba) \\
(3.2\ 2.3\ 1.3) & \rightarrow & (accaba) \\
(3.3\ 2.3\ 1.3) & \rightarrow & (aacaba)
\end{array}\right\} \text{semiotische Trito-Struktur}$$

4.2. Positions-Abstraktion des Zeichens

$$\left.\begin{array}{lcl}
(abcbbb) & \rightarrow & (abbbbc) \\
(abcbbc) & \rightarrow & (abbbcc) \\
(abcbba) & \rightarrow & (aabbbc) \\
(abccbc) & \rightarrow & (abbccc) \\
(abccba) & \rightarrow & (aabbcc) \\
(abcaba) & \rightarrow & (aaabbc) \\
(acccbc) & \rightarrow & (abcccc) \\
(acccba) & \rightarrow & (aabccc) \\
(accaba) & \rightarrow & (aaabcc) \\
(aacaba) & \rightarrow & (aaaabc)
\end{array}\right\} \text{semiotische Deutero-Struktur}$$

4.3. Iterations-Abstraktion

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{(abbbbc)}\\ \text{(abbbcc)}\\ \text{(aabbbc)}\\ \text{(abbccc)}\\ \text{(aabbcc)}\\ \text{(aaabbc)}\\ \text{(abcccc)}\\ \text{(aabccc)}\\ \text{(aaabcc)}\\ \text{(aaaabc)}\end{array}\right\} \rightarrow \qquad \text{(abc)}\end{array}\right\} \quad \text{semiotische Proto-Struktur}$$

5.1. Wert-Belegung der Proto-Zeichen

(abc) → (123) ≅ (132) ≅ (213) ≅ (231) ≅ (321) ≅ (312)

(Zum Normalform-Operator vgl. Kronthaler 1986, S. 39.)

5.2. Wert-Belegung der Deutero-Zeichen

(abbbbc) → (122223) ≅ (133332) ≅ (211113) ≅ (233331) ≅ ...
(abbbcc) → (122233) do.
(aabbbc) → (112223) do.
(abbccc) → (122333) do.
(aabbcc) → (112233) do.
(aaabbc) → (111223) do.
(abcccc) → (123333) do.
(aabccc) → (112333) do.
(aaabcc) → (111233) do.
(aaaabc) → (111123) do.

5.3. Wert-Belegung der Trito-Zeichen

(abcbbb) → (123222) ≅ (132333) ≅ (213222) ≅ (232333) ≅ ...
(abcbbc) → (123223) do.
(abcbba) → (123221) do.
(abccbc) → (123323) do.

(abccba)	→	(123321)	do.
(abcaba)	→	(123121)	do.
(acccbc)	→	(133323)	do.
(acccba)	→	(133321)	do.
(accaba)	→	(133121)	do.
(aacaba)	→	(113121)	do.

6.1. Reihenfolge der Proto-Zeichen

(123)

6.2. Reihenfolge der Deutero-Zeichen

(111123)
(111223)
(111233)
(112223)
(112233)
(112333)
(122223)
(122233)
(122333)
(123333)

6.3. Reihenfolge der Trito-Zeichen

(113121)
(123121)
(123221)
(123222)
(123223)
(123321)
(123323)
(133121)
(133321)
(133323)

7. Morphogramme

7.1. Morphogramm für Proto-Zeichen

In der hexadischen Semiotik gibt es nur ein Proto-Zeichen, und dieses erscheint in der Kontextur K = 4:

0123

Wir wollen an dieser Stelle exemplarisch, d.h. praemissis praemittendis auch für die nachfolgenden Abschnitte über Deutero- und Trito-Zeichen, zeigen, wie man die Maximalanforderungen der durch die abstrakte qualitative Zahlentheorie vorausgesagten Menge an Morphogrammen erfüllen könnte. Da das Morphogramm 0123 nur eines von 4 möglichen Morphogrammen der Proto-Zahlen ist, sehen die übrigens 3 Morphogramme wie folgt aus.

0000 $\rightarrow$ (1111), (2222), (3333), (4444)
0001 $\rightarrow$ (1112), (1113), ..., (2221), (2223), ..., (3334), ..., (4443)
0012 $\rightarrow$ (1123), ...
0123 $\rightarrow$ (1234)

Triadische Zeichenklassen als Fragmente tetradischer werden also nur über 0012 konstruiert. Und hier ist man im Grunde frei, ob man 1123 z.B. als (3.a 2.b 1.c 1.d) oder als (3.2 1.1), d.h. als Dyaden-Paar wie in der monokontexturalen Semiotik, interpretiert. Jedenfalls sieht man bereits anhand der Proto-Primzeichen-Relation, dass triadische Semiotiken stets Fragmente tetradischer Semiotiken sind (vgl. Toth 2003, S. 54 ff.).

7.2. Morphogramme für Deutero-Zeichen

Da wir von einer hexadischen Semiotik ausgehen, benöltigen wir K = 7, um die Morphogramme der Deutero- und der Trito-Zeichen darzustellen.

0111123
0111223
0111233
0112223
0112233
0112333
0122223

0122233
0122333
0123333

7.3. Morphogramme für Trito-Zeichen

0113121
0123121
0123221
0123222
0123223
0123321
0123323
0133121
0133321
0133323

8. Vergleich der Basis-Morphogramme und der semiotischen Morphogramme

8.1. Proto-Zahlen und Proto-Zeichen

1 0
2 00
01
3 000
001
012
4 0000
0001
0012
0123 0123
5 00000
00001
00012
00123
01234
6 000000
000001
000012
000123
001234

012345
7 0000000
0000001
0000012
0000123
0001234
0012345
0123456

8.2. Deutero-Zahlen und Deutero-Zeichen

1 0
2 00
01
3 000
001
012
4 0000
0001
0011
0012
0123
5 00000
00001
00011
00012
00112
00123
01234
6 000000
000001
000011
000012
000111
000112
000123
001122
001123
001234
012345

7	0000000	0111123 → 0000000111123 (K = 13)
	0000001	0111223 → 000000111223 (K = 12)
	0000011	0111233 → 00000111233 (K = 11)
	0000012	0112223 → 0000112223 (K = 10)
	0000111	0112233 → 000112233 (K = 9)
	0000112	0112333 → 00112333 (K = 8)
	0000123	0122223
	0001111	0122233
	0001112	0122333
	0001123	0123333
	0001222	
	0001223	
	0001234	
	0012345	
	0123456	

Wenn man also von der unveränderten, d.h. nicht-iterierten und anderswie erweiterten Normalform (vgl. Kronthaler 1986, S. 52 ff.) der Morphogramme ausgeht, muss man die oben markierten als Fragmente aus höheren Kontexturen (bis und mit K = 13) betrachten. Die letzten 4 Monogramme können z.B. als durch Minimierungsoperation (vgl. Kronthaler 1986, S. 38) aus dem letzten regulären Morphogramm von K = 7 erklärt werden.

8.3. Trito-Zahlen und Trito-Zeichen

Die Kontextur K = 7 hat 877 Morphogramme. Ich beschränke mich deshalb hier auf die Angabe der 10 Trito-Zeichen-Morphogramme.

0113121 → 00113121 [?], K = 8
0123121
0123221
0123222
0123223
0123321
0123323
0133121
0133321
0133323

Das erste Morphogramm verweist auf die nächst-höhere Kontextur. Die anderen können hierher gehören, wenn man sich als durch Intra-Operatoren verändert (vgl. Kronthaler 1986, S. 37 ff.) anschaut.

9. Die Anzahl der Morphogramme der Proto-, Deutero- und Trito-Systeme der ersten 7 Kontexturen

K	Proto		Deutero		Trito (Bell-Zahlen)	
	Za.	Zei.	Za.	Zei.	Za.	Zei.
1	1		1		1	
2	2		2		2	
3	3		3		5	
4	4	1	5		15	
5	5		7		52	
6	6		11		203	
7	7		15	10	877	10

Anhand dieser Vergleichtabelle zwischen der Anzahl der Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen sowie der entsprechenden Zeichen kann man sich orientieren, was für ein ungeheuer fragmentarisches System die triadische Peircesche Semiotik ist. Wenn man ferner zustimmt, dass manche Deutero- und Trito-Morphogramme selber Fragmente von bis zu 13-kontexturalen qualitativen Zahlensystemen sind, kommt man zu ähnlich erschreckenden Schlussfolgerungen wie denjenigen zur Logik von Gotthard Günther (1980, S. 179 ff.). Und dies alles, nachdem wir für diese Arbeit ja die Trichotomien und die Ordnung der Fundamentalkategorien abgeschafft haben! Es sind damit die folgenden zwei Hauptgründe, die für den Fragmentstatus der Semiotik und ihrer daraus folgenden Unfähigkeit, Wirklichkeit qualitativ-quantitativ bzw. quantitativ-qualitativ zu beschreiben, verantwortlich zu machen sind:

1. Das Gesetz der paarweisen Verschiedenheit der Fundamentalkategorien, d.h. ZR = (1, 2, 3) mit $1 \neq 2$, $2 \neq 3$ und $1 \neq 3$.

2. Die Beschränkung auf die Triadizität nach oben und die Beschränkungen auf die Triadizität nach unten, d.h. die Nichtakzeptanz 1- und 2-stelliger Relationen, als zeichenhaft sowie die falsche Behauptung, alle n-adische Relationen könnten auf 3-adische reduziert werden (vgl. Toth 2008, S. 713 ff.).

Möglicherweise ist die Beschränkung 1 sogar dafür verantwortlich, dass man den Grossteil der Deutero-Morphogramme erst in 13 Kontexturen beschreiben kann. Wenn man vor allem die Beschränkung 1 aufhebt, erhält man zwar keine Zeichenklassen der bisher bekannten Formen mehr, aber einen Strukturreichtum bis 877 semiotischen Trito-Zahlen (Morphogrammen), also bedeutend mehr als die maximale Anzahl von $3^3 = 27$ triadischen Zeichenklassen. Zusammenfassend müssen wir also für eine polykontexturale Semiotik die folgenden Limitationen aufheben:

1. Die Verschachtelung, d.h. die Menge als Meta-Relation oder die Meta-Menge als Relation
2. Die Trichotomien als angebliche Untergliederungen oder „Feinbezüge“ der Triaden (und damit die differenten Ordnungen der triadischen und der trichotomischen Peirce-Zahlen).
3. Die paarweise Verschiedenheit der Kategorien
4. Die beiderseitige Begrenzung auf triadische Relationen. Die n-adizität semiotischer Relationen muss umgekehrt sogar aus der Anzahl der jeweils benötigten Kontexturen folgen, d.h. prinzipiell als variabel eingeführt werden.

Eine solche m-kontexturale n-adische Semiotik wird die Peircesche Semiotik natürlich als Spezialfall enthalten, als unbedeutenden.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. 3 Bde. Hamburg 1978-1980

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics, http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf (2008)

Kaehr, Rudolf, Category of glue II. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Category%20Glue%20II/Category%20Glue%20II.html (2009a)

Kaehr, Rudolf, Polycontexturality of Signs? http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/PolySigns/PolySigns.pdf (2009b)

Kaehr Rudolf, Luhmann's secret diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Luhmanns%20Diamonds/Luhmanns%20Diamonds.pdf (2009c)

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Kronthaler, Engelbert, Zeichen – Zahl – Begriff. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 282-310

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2008
Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Quant-Qual%20Arithm.pdf (2009)
Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

24.11.2009